

Autour de la structure des espaces vectoriels

August 29, 2025

$E = K - e.v.$ Dans le cas où sa dimension est finie, elle est souvent notée n . Pour tout endomorphisme u de E et tout polynôme $P = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, on pose

$$P(u) = \sum_{k \geq 0} a_k u^k$$

avec $u^0 = id$, $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ pour $k > 0$.

Problème 1. Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On considère l'application

$$\psi_u : \begin{array}{l} K[x] \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto P(u) \end{array}$$

1. Vérifier que ψ_u est linéaire.
2. Vérifier que pour tous $P, Q \in K[x]$, on a : $\psi_u(PQ) = \psi_u(P) \circ \psi_u(Q)$.
3. Dire pourquoi la famille $(id, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ est liée.
4. En déduire que ψ_u n'est pas injective. Un polynôme $P \in \ker \psi_u$ est appelé désormais polynôme annulateur de u .
5. Vérifier que $\Delta_u := \{d^\circ(P), P \in K[x] \setminus \{0\}, \psi_u(P) = P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ admet un minimum $r \in \mathbb{N}^*$. On note Π_u un polynôme de Δ_u ayant r comme degré.
6. Montrer que $\ker \psi_u = \{\Pi_u P, P \in K[x]\}$.

Partie II

Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in K$, on note $E_\lambda(u) = \{v \in E \mid u(v) = \lambda v\}$.

1. Dire rapidement pourquoi $E_\lambda(u)$ est un $s - e.v$ de E .
2. Supposons que $E_\lambda(u)$ contient un vecteur non nul x_0 , justifier que $\dim E_\lambda(u) \geq 1$.
3. Vérifier que si $\dim E_\lambda(u) \geq 1$, alors : $E_\lambda(u) = E_\mu(u) \iff \lambda = \mu$.

4. Vérifier que $E_\lambda(u)$ est stable par u , i.e, $u(E_\lambda(u)) \subseteq E_\lambda(u)$.
5. Soit $x \in E_\lambda(u)$.
 - (a) Vérifier que $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout entier $k \geq 0$.
 - (b) En déduire que $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
6. Montrer alors que $\{\lambda \in K \mid E_\lambda(u) \neq \{0_E\}\}$ est fini.

Partie III

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u admet un polynôme annulateur de la forme $P := (x - \lambda)(x - \mu)$, où $\lambda \neq \mu$.

1. Trouver deux polynômes A, B tels que $A(x - \lambda) + B(x - \mu) = 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $A(x - \lambda)(u)(x) \in E_\mu(u)$ et $B(x - \mu)(u)(x) \in E_\lambda(u)$.
3. En déduire que $E = E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u)$.
4. Trouver une décomposition de E dans le cas où u est un projecteur ou une symétrie.

Problème 2. Dans ce problème $u \in \mathcal{L}(E)$.

Partie I

1. Vérifier que pour tout $k \geq 0$, on a : $\ker u^k \subseteq \ker u^{k+1}$ et $\operatorname{Im} u^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} u^k$.
2. Montrer les deux implications suivantes :

$$\ker u^{k-1} = \ker u^k \implies \ker u^k = \ker u^{k+1}$$

- (a) Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k \geq 0}$ est stationnaire.
- (b) Vérifier ainsi qu'on peut définir les deux entiers suivants :

$$p := \inf \{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

$$\ell := \inf \{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1}\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1}\}$$

- (c) Montrer que $p = \ell$. (Utiliser le théorème du rang)
- (d) Montrer que $E = \ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.
3. Soit $i, j \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\omega_{i,j} : \begin{array}{l} \ker u^{i+j} \longrightarrow \ker u^j \cap \operatorname{Im} u^i \\ x \longmapsto u^i(x) \end{array}$$

est surjective.

4. En déduire que $\dim(\ker u^j \cap \operatorname{Im} u^i) = \dim \ker u^{i+j} - \dim \ker u^i$. (Appliquer le théorème du rang à $\omega_{i,j}$)
5. En choisissant convenablement i, j , montrer que la suite $(\dim(\ker u^k) - \dim(\ker u^{k-1}))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Partie II

On dit qu'un endomorphisme v de E est nilpotent s'il existe un entier k tel que $v^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'ordre de nilpotence de v est $p > 0$ si :

$$v^p = 0, \quad v^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

u est supposé nilpotent d'ordre p dans cette partie.

1. Vérifier que

$$\tau : \begin{array}{ccc} K^2 & \longrightarrow & K^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (0, x) \end{array}$$

est nilpotent d'ordre 2.

2. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
3. Montrer que la famille $(u^i(x))_{0 \leq i \leq p-1} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Commenter le résultat lorsque $p = n$.
4. Peut on avoir $p > n$.
5. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq p-1$, $\ker u^k \subsetneq \ker u^{k+1}$.
6. En déduire que $p = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$.
7. En considérant la somme $\sum_{k=1}^p \dim(\ker u^k) - \dim(\ker u^{k-1})$, retrouver le fait que $p \leq n$.

Problème autour de la réduction de Jordan

August 29, 2025

Sauf mention contraire, E est un espace vectoriel réel de dimension n .

Pour tout entier $m > 0$, on appelle bloc de Jordan de taille m associé à la valeur λ la matrice

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

On rappelle que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent u est le plus petit entier p assurant que $u^p = 0$. La même terminologie s'étend aux matrices.

Partie I

Soit u un endomorphisme de E .

1. Vérifier que pour tout $k \geq 0$, on a : $\ker u^k \subseteq \ker u^{k+1}$ et $\operatorname{Im} u^{k+1} \subseteq \operatorname{Im} u^k$.
2. Montrer les deux implications suivantes :

$$\ker u^{k-1} = \ker u^k \implies \ker u^k = \ker u^{k+1}$$

3. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k \geq 0}$ est stationnaire.
4. Vérifier ainsi qu'on peut définir les deux entiers suivants :

$$p = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$
$$\ell = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{k+1}\}$$

5. Montrer que $p = \ell$.
6. Montrer que $E = \ker u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.
7. Soit $i, j \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\omega_{i,j} : \begin{array}{l} \ker u^{i+j} \longrightarrow \ker u^j \cap \operatorname{Im} u^i \\ x \longmapsto u^i(x) \end{array}$$

est surjective.

8. En déduire que $\dim(\ker u^j \cap \operatorname{Im} u^i) = \dim \ker u^{i+j} - \dim \ker u^i$. (Appliquer le théorème du rang à $\omega_{i,j}$)
9. On pose $d_k = \dim(\ker u^k) - \dim(\ker u^{k-1})$. En choisissant convenablement i, j , montrer que la suite d_k est décroissante.
10. Pour tout entier positif r , évaluer la somme

$$\sum_{k=0}^r d_k.$$

11. Quelle relation relie $J_m(0)$ et $J_m(\lambda)$?
12. Montrer que $J_m(0)$ est une matrice nilpotente en précisant l'indice de nilpotence.
13. Donner une borne supérieure de l'indice de nilpotence.
14. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice n . Montrer qu'il existe une base dans la quelle la matrice de u est $J_n(0)$.
15. Soit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_r}(0) \end{bmatrix}.$$

Vérifier que A est nilpotente d'indice qu'on précisera.

Partie II

Dans cette partie, u est un endomorphisme nilpotent d'indice $2 \leq p < n$. Pour tout $1 \leq j \leq p$, on note F_j un supplémentaire (quelconque pour le moment) de $\ker u^{j-1}$ dans $\ker u^j$. Si $\mathcal{F} = (v_j)_j$ est une famille des vecteurs de E alors la notation $u(\mathcal{F})$ est la famille $(u(v_j))_j$.

1. Vérifier que si $v \in F_j \setminus \{0\}$ alors $u(v) \in \ker u^{j-1} \setminus \ker u^{j-2}$.
2. Montrer que si $z_1, \dots, z_\ell \in F_j$ sont linéairement indépendants alors $u(z_1), \dots, u(z_\ell)$ sont aussi linéairement indépendants, et que $\operatorname{vect}(u(z_1), \dots, u(z_\ell)) \cap \ker u^{j-2} = \{0\}$.
3. Soit $\mathcal{B}_p = (v_1, \dots, v_{d_p})$ une famille libre de F_p .
 - (a) Dire pourquoi une telle famille $\mathcal{B}_p$ existe.
 - (b) Montrer que $u(\mathcal{B}_p)$ est une famille libre de $\ker u^{p-1}$, et que $\operatorname{vect}(u(\mathcal{B}_p)) \cap \ker u^{p-2} = \{0\}$.
 - (c) Montrer que $u^j(\mathcal{B}_p)$ est une famille libre de $\ker u^{p-j}$, et que $\operatorname{vect}(u^j(\mathcal{B}_p)) \cap \ker u^{p-j-1} = \{0\}$, $1 \leq j \leq p-1$.
 - (d) En déduire que la famille (augmentée) $(\mathcal{B}_p, u(\mathcal{B}_p), \dots, u^{p-1}(\mathcal{B}_p))$ est libre.
4. Justifier que chaque F_j contient au moins une famille libre de d_j vecteurs. Peut on dépasser d_j ?

5. On garde la définition de $\mathcal{B}_p$ apparue précédemment. On définit par récurrence la suite $\mathcal{C}_j$ suivante :
1. $\mathcal{C}_p = \mathcal{B}_p$
 2. On complète $u(\mathcal{C}_p)$ par des vecteurs libres de manière à construire une base de F_{p-1} . On note $\mathcal{C}_{p-1}$ cette famille.
 3. On complète $u(\mathcal{C}_{p-1})$ par des vecteurs libres de manière à construire une base de F_{p-2} . On note $\mathcal{C}_{p-2}$ cette famille.
 - $\vdots$
 - $p-1$. On complète $u(\mathcal{C}_2)$ par des vecteurs libres de manière à construire une base de F_1 . On note $\mathcal{C}_1$ cette famille.

- (a) Donner le cardinal de $\mathcal{C}_j$.
- (b) Vérifier que

$$\ker u^j = \ker u^{j-1} \oplus \text{vect}(\mathcal{C}_j).$$

6. Retrouver le fait que d_k est décroissante.
7. Quelle est donc la nature de l'ensemble

$$\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^p \mathcal{C}_j$$

8. Soit l'endomorphisme f nilpotent d'ordre 4. On donne
- $$B_4 = (z) \in F_4.$$
- $$B_3 = (f(z)) \in F_3.$$
- $$B_2 = (f^2(z), x) \in F_2.$$
- $$B_1 = (f^3(z), f(x), y, t) \in F_1 = \ker f^1.$$

$f^3(z)$	$f^2(z)$	$f(z)$	z
$f(x)$	x		
y			
t			

- (a) Donner la suite d_k associé à f .
 - (b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f est diagonale par blocs de Jordan à préciser.
9. Montrer maintenant qu'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u est diagonale par blocs de Jordan. Donner les nombre des blocs.
10. Soit A, B deux matrices nilpotentes. Montrer que

$$A \sim B \iff \text{rg}(A^k) = \text{rg}(B^k) \quad \forall k.$$

Le symbole $\sim$ signifie semblable.

11. Dénombrer les classes des similitudes des matrices nilpotentes lorsque leurs tailles est $n = 2, 3, 4$.

Autour des fonctions vectorielles

Brought to you by IPEIM Team

August 29, 2025

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (0.1)$$

où les a_i sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I .

Soit $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n solutions de (0.1) et on note W le Wronskien de $\mathbf{f}$, i.e

$$W = \det \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que

$$W' = \det \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(n-2)} \\ \mathbf{f}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

2. Montrer que

$$W' = -a_{n-1}W.$$

3. En déduire la formule d'Abel :

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s)ds}.$$

4. On considère le système différentiel

$$X' = AX \quad (0.2)$$

d'inconnu vectoriel X avec A une matrice carré. Soit $X_1, \dots, X_n$ n solutions vectorielles de (0.2). On pose

$$\mathbb{X} = [X_1 \mid \dots \mid X_n].$$

(a) Vérifier que

$$\mathbb{X}' = A\mathbb{X}.$$

(b) En déduire que

$$\mathbb{X} = e^{At}\mathbb{X}(0).$$

(c) Montrer que $\det(\mathbb{X}) = e^{\text{tr}(A)t} \det(\mathbb{X}(0))$.

(d) Commenter.

Exercice 2. Soit A une matrice réelle symétrique. On considère l'application

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = x^T A x$$

avec x est modélisé par une colonne. On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

1. Dire pourquoi f est continue.
2. En déduire qu'il existe $P \in S^{n-1}$ tel que $f(x) \leq f(P)$ pour tout $x \in S^{n-1}$.
3. Soit la courbe

$$t \in \mathbb{R} \mapsto C(t) = \cos(t)P + \sin(t)w$$

avec $w \in \text{vect}(P)^\perp \cap S^{n-1}$.

- (a) Vérifier que $\|C(t)\| = 1$.
- (b) Calculer $C'(t)$.
4. Soit $g(t) = f(C(t))$.
 - (a) Donner l'expression de $g'(t)$.
 - (b) Dire pourquoi $g'(0) = 0$.
5. En déduire que P est un vecteur propre de A .
6. Justifier que

$$\max_{x \in S^{n-1}} f(x) = \max \text{sp}(A).$$

Exercice 3. Le corps ambiant dans le problème est $\mathbb{C}$. De plus, on admet le théorème suivant :

Théorème. *Toute matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de Jordan. Autrement dit*

$$N \sim \begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_r}(0) \end{bmatrix}$$

où chaque $J_{m_j}(0)$ est une matrice carrée de taille m_j ayant des zéros partout sauf sur la surdiagonale qui est remplie par des uns.

Soit N une matrice nilpotente de taille n . On pose

$$L(I_n + N) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k}.$$

1. Montrer que $L(I_n + N)$ est bien définie.
2. On considère la fonction vectorielle

$$\varphi : t \mapsto L(I_n + tN).$$

- (a) Dire pourquoi φ est définie sur tout $\mathbb{R}$.
- (b) Vérifier que φ est infiniment dérivable.

3. Montrer que $I_n + tN$ est une matrice inversible.

4. Montrer que

$$(I_n + tN)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k N^k.$$

5. En déduire que $\varphi'(t) = (I_n + tN)^{-1}N$.

6. Soit maintenant la fonction vectorielle

$$\psi : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\varphi(t)}.$$

- (a) Donner l'expression de $\psi'(t)$.
- (b) Montrer alors que $\psi''(t) = 0$.

7. En déduire que

$$e^{L(I_n + N)} = I_n + N.$$

8. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer qu'un bloc de Jordan $J_m(\lambda)$ admet un antécédent par la fonction exponentielle si et seulement si $\lambda \neq 0$.

9. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer alors que toute matrice de $GL(n, \mathbb{C})$ admet un antécédent par la fonction exponentielle.

10. Dire pourquoi cette dernière propriété échoue si on travaille sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$.

11. Montrer que $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 1. Formule de Rodrigues

On note $O(\mathbb{R}^3)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ et $SO(\mathbb{R}^3)$ son sous groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^3$, i.e

$$SO(\mathbb{R}^3) = \{u \in O(\mathbb{R}^3) \mid, \det(u) = 1\}.$$

Soit u un élément de $SO(\mathbb{R}^3)$.

1. Justifier que $\emptyset \subsetneq sp(u) \subseteq \{\pm 1\}$.
2. Montrer que 1 est toujours un élément de $sp_{\mathbb{R}}(u)$.
3. En déduire l'existence d'une base orthonormée dans la quelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

4. En déduire les valeurs de θ pour les quelles u est diagonalisable.

Terminologie : Si dans une base orthonormée directe (n, z, v) , la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

on dit que u est une rotation vectorielle d'axe porté par n , $Vect(n)$, et d'angle θ . On note ainsi $u = R_{n,\theta}$. On admet que la matrice de u est la même dans n'importe base orthonormée directe (n, z', v') .

Partie 2.

Soit u la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'axe porté par ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

- R la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$.
- $\Pi = \omega^\perp$.

La formule de Lagrange

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a \cdot c \rangle b - \langle a \cdot b \rangle c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, peut être utilisée sans démonstration.

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

1. Que représente $x_\omega := \langle x \cdot \omega \rangle \omega$?
2. Soit x_Π la projection orthogonale de x sur $\omega^\perp$.
 - (a) Quelle est la relation entre x_Π et $\omega \wedge x_\Pi$?

(b) Justifier que

$$u(x_{\Pi}) = \cos(\theta)x_{\Pi} + \sin(\theta)(\omega \wedge x_{\Pi}).$$

3. Vérifier que $\omega \wedge x_{\Pi} = \omega \wedge x$

4. En déduire la formule de Rodrigues suivante :

$$u(x) = x \cos(\theta) + \sin(\theta)(\omega \wedge x) + (1 - \cos(\theta))\langle \omega \cdot x \rangle \omega.$$

5. Écrire la matrice K de l'endomorphisme $x \mapsto \omega \wedge x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. Quelle est le type de la matrice K ?

7. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $x \mapsto \langle \omega \cdot x \rangle \omega$ dans la base canonique est $K^2 + I_3$.

8. En déduire que $K^3 = -K$.

9. Montrer que

$$R = I_3 + \sin(\theta)K + (1 - \cos(\theta))K^2.$$

10. En utilisant les développements en séries entières des fonctions cos et sin, montrer que

$$R = e^{\theta K}.$$

11. Montrer R satisfait le système différentiel à inconnu matriciel $X \in M(3, \mathbb{R})$

$$\frac{dX}{d\theta} = KX. \quad (0.1)$$

12. Montrer que le système (0.1) est équivalent à

$$X'_j = KX_j$$

pour $j \in \{1, 2, 3\}$, où X_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de X .

13. En déduire que $R = e^{\theta K}$.

14. En déduire une méthode pratique basée sur la formule de Rodrigues pour déterminer l'angle θ d'une rotation de l'espace. Appliquer à la rotation

$$R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. Autour de déterminant de Gram.

Soient E un espace préhilbertien et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E . On note

$$G = [x_i \cdot x_j],$$

i.e, la matrice formée par les produits scalaires des x_i 's. On appelle déterminant de Gram, noté $G(x_1, \dots, x_p)$, le déterminant de G . Autrement dit

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det(G) = \det([x_i \cdot x_j]).$$

1. Montrer que les x'_i s sont libres si et seulement si $G(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.
2. Donner l'expression de $G(x_1, \dots, x_p)$ dans le cas où les x'_i s sont orthogonaux. Donner une interprétation géométrique.
3. On suppose que les x'_i s forment une base de E . On pose $y_i = Px_i$ avec P une matrice inversible.
 - (a) Justifier que $(y_1, \dots, y_p)$ est une base de E .
 - (b) Établir une relation entre les matrices $[x_i \cdot x_j]$ et $[y_i \cdot y_j]$.
 Indication : Écrire $x \cdot y$ en utilisant les coordonnées dans les bases $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_p)$.
4. En déduire que $G(x_1, \dots, x_p)$ est toujours positif.
5. Soit $x \in E$ et y la composante orthogonale de x sur $V := \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
 - (a) Que vaut $d := \text{dist}(x, V)$?
 - (b) Écrire $G(x_1, \dots, x_p, x)$ en fonction de $x_1, \dots, x_p, y$.
 - (c) En déduire que $G(x_1, \dots, x_p, x) = d^2 G(x_1, \dots, x_p)$.

Autour des objets remarquables dans un espace Euclidien

Brought to you by IPEIM Team

August 29, 2025

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n, M_n(\mathbb{R})$ sont équipés de leurs produits scalaires usuels, ainsi que les normes associées. S'il n'y a pas d'ambiguïté, le produit scalaire est noté $(\cdot, \cdot)$.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales réelles de taille n .

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles symétriques positives de taille n .

Pour une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_i 's sont positifs, la notation $\sqrt{D}$ désigne la matrice diagonale $\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$.

La co-diagonalisation de deux matrices diagonalisables et qui commutent peut être utilisée sans démonstration.

Exercice 1. Soit A une matrice symétrique réelle de taille n . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée sous-jacente formée par des vecteurs propres de A . On convient qu'un vecteur est modélisé par une colonne.

1. Que représente $\Phi_i : x \mapsto (v_i^T x)v_i$?
2. Vérifier que $\Phi_i \Phi_j = \delta_{i,j} \Phi_i$.
3. Donner la matrice de Φ_i relativement à la base canonique.
4. Justifier l'égalité

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i.$$

5. Trouver la limite de $(A^n)_n$.

Exercice 2. Un théorème ergodique.

Soit u une isométrie d'un espace Euclidien V . On pose $v = u - id$.

1. Montrer que $\ker v = \text{Im} v^\perp$ et que $\ker v^\perp = \text{Im} v$.

2. Pour tout entier $n > 0$, on définit

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

(a) Soit $x \in \ker v$. Vérifier que $u_n(x) = x$.

(b) Soit $x \in \ker v^\perp$. Montrer que $u_n(x) = \frac{1}{n}(u^n(z) - z)$ pour un certain $z \in V$.

3. Montrer que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ tant que $x \in \ker v^\perp$.

4. Identifier la limite de $u_n(x)$ pour tout $x \in V$.

Vous pouvez utiliser le fait que $V = \ker v \oplus \ker v^\perp$.

Exercice 3. Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale.

2. Citer alors les éléments caractéristiques de A , à savoir angle et axe.

Problème.

Partie 1

Un résultat dit que toute matrice inversible A peut se décomposer en

$$A = SO \tag{0.1}$$

où O est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive. On veut donner une telle décomposition et discuter l'unicité du couple (S, O) . On rappelle que AA^T est orthogonalement semblable à une matrice $D = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ via une matrice de passage orthogonale P , i.e

$$A^T A = P D P^T.$$

Pour le moment, la matrice A est prise inversible.

1. Justifier que $S = P\sqrt{D}P^T$ et $O = S^{-1}A$ conviennent.

2. Dire pourquoi on a un polynôme p tel que $\sqrt{\xi_i} = p(\xi_i)$ pour tout i .

3. On suppose que $A = \tilde{S}\tilde{O}$ pour un autre couple $(\tilde{S}, \tilde{O}) \in \mathcal{S}_n^+ \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que $S = p(S^2) = p(\tilde{S}^2)$.

(b) Montrer que S et $\tilde{S}$ sont co-diagonalisable.

(c) En déduire que l'écriture (0.1) est unique.

(d) Y a t'il quelque chose de contre-intuitive concernant l'unicité?

4. On rappelle que la norme subordonnée (Euclidienne) d'une matrice inversible est donnée par

$$|A| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Montrer que $|A| = \sqrt{\rho}$ avec ρ étant la plus grande valeur propre de $A^T A$.

Partie 2

Pour toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit les valeurs singulières de A comme étant les racines carrées des valeurs propres (positive) de $A^T A$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nuls de $A^T A$ et $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ les valeurs singulières de A . En particulier, on a $\text{rg}(A) = r$.

1. Donner l'ensemble des valeurs singulières de A lorsqu'elle est symétrique.
2. Soit $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_{r+1}, \dots, \mathbf{q}_n)$ une base orthonormale formée des vecteurs propres de $A^T A$ correspondant aux λ_i 's. En particulier, les $\mathbf{q}_{r+1}, \dots, \mathbf{q}_n$ sont dans $\ker A^T A$.
 - (a) Vérifier que les vecteurs $\mathbf{p}_i := \frac{A\mathbf{q}_i}{\sigma_i}$ forment une famille orthonormale.
 - (b) Soit $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_{r+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$ une base orthonormée complétée à partir de $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$. Donner ainsi une matrice diagonale Σ , une matrice P de $\mathcal{O}_m$ et une matrice Q de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P\Sigma Q^T. \quad (0.2)$$

Cette question nécessite voir l'identité de la manière suivante

$$AQ = P\Sigma.$$

La matrice Σ est diagonale, donc les colonnes de $P\Sigma$ sont celle de P multipliées par les coefficients diagonaux de Σ . Ainsi la première colonne de AQ vaut (*constante*) $\times$ la première colonne de P et ainsi de suite. Mais, en contre partie, on a déjà construit des vecteurs vérifiant des telles relations

$$Aq_i = \sigma_i p_i$$

pour i allant de 1 jusqu'à r . Quelqu'un va dire, OK pour $i = 1, \dots, r$, mais que faire pour $i = r + 1, \dots$. On sait que q_i est un élément de $\ker A^T A$, qui est égal à $\ker A$, c-à-d

$$Aq_i = 0$$

aussi pour $i = r + 1, \dots$. Par conséquent, on prend

$$Q = [\underbrace{q_1 \mid \dots \mid q_r}_{Aq_i = \sigma_i p_i} \mid \underbrace{q_{r+1} \mid \dots \mid q_n}_{Aq_i = 0}]$$

$$P = [p_1 \mid \dots \mid p_m]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & 0 \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Σ peut être rectangulaire verticale ou horizontale selon m et n .

(c) La décomposition (0.2) s'appelle la décomposition de A en valeurs singulières, SVD en abrégé.

3. Calculer AA^T et $A^T A$ en fonction de P, Σ, Q .

Partie 3

Dans cette partie, A est une matrice réelle carrée et de taille n .

1. Est-il nécessaire que la matrice diagonale apparaissant dans la décomposition SVD de A contienne les valeurs propres de A ?
2. Montrer que $\|AR\| = \|RA\| = \|A\|$ pour tout élément R de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\text{dist}(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \text{dist}(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
4. Vérifier que $\|D - R\|^2$ est minimale si et seulement si $\varphi(R) = (D, R)$ est maximale.
5. Justifier que $(D, R) \leq \varphi(I_n)$.
6. En déduire que $\text{dist}(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$. Peut-on remplacer I_n par des autres candidates?

Rappelez-vous que le produit scalaire $\text{tr}(A^T B)$ comporte comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, vous traitez les coefficients de la matrice comme les coordonnées d'un vecteur usuel vis à vis ce produit scalaire. On a donc

$$(D, R) = \sum D_{i,i} R_{i,i}$$

car D est diagonale. R est orthogonale donc $|R_{i,i}| \leq 1$ avec égalité pour $R = I_n$. Les $D_{i,i}$ sont positifs donc

$$(D, R) = \sum D_{i,i} R_{i,i} \leq \sum D_{i,i} \cdot 1 = (D, I_n).$$

Ainsi I_n achève la minimalité. On suppose qu'il y a une autre matrice candidate J . Ceci implique que

$$(D, I_n) = (D, J),$$

donc

$$(D, I_n - J) = \sum \underbrace{D_{i,i}}_{\geq 0} \underbrace{(1 - J_{i,i})}_{\geq 0} = 0$$

ainsi $D_{i,i}(1 - J_{i,i}) = 0$ pour tout i . En particulier si les $D_{i,i}$ sont non nuls alors $J_{i,i} = 1$ et par suite $J = I_n$.

7. Trouver maintenant la matrice orthogonale $\tilde{A}$ telle que $\text{dist}(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - \tilde{A}\|$.
8. En s'inspirant des questions précédentes, trouver la matrice minimisant la distance entre A et l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ ayant un rang k (fixé).
On commence par le cas où $k = \text{rg}(D)$. Dans ce cas, $D \in \Delta_k$ et trivialement

$$\text{dist}(D, \Delta_k) = \|D - D\| = 0.$$

On suppose maintenant que $k > \text{rg}(D) = r$. Quitte à permuter les $D_{i,i}$ on peut supposer que $D_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1, \dots, r$. On obtient

$$\|D - B\|^2 = \sum (D_{i,i} - B_{i,i})^2 + \sum_{i \neq j} B_{i,j}^2 \geq \sum_i (D_{i,i} - B_{i,i})^2 = \sum_{i \leq r} (D_{i,i} - B_{i,i})^2 + \sum_{i=r+1} B_{i,i}^2 \quad (\star).$$

Que dit l'inégalité $(\star)$? Elle dit que la distance $\|D - B\|^2$ est minorée par la distance (au carré) entre D et les matrices diagonales, qui font partie de Δ_k (il suffit de prendre $\text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$ par exemple). D'autre part

$$B_m = \text{diag}(D_{1,1}, \dots, D_{r,r}, \underbrace{\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}}_{k-r \text{ fois}}, 0, \dots, 0) \in \Delta_k$$

vérifie

$$\|D - B_m\|^2 = \frac{k-r}{m^2} \geq \text{dist}(D, \Delta_k)$$

pour tout m (entier positif). Par passage à la limite en m , on obtient

$$\text{dist}(D, \Delta_k) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|D - B_m\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k-r}{m^2} = 0.$$

Donc $\text{dist}(D, \Delta_k) = 0$ mais pas de matrice minimisante !!!.

Maintenant, on passe au cas restant : $k < r$. En réutilisant $(\star)$, le même approche nous permet de nous limiter de travailler qu'avec les matrices diagonales de Δ_k . Pour minimiser

$$\sum_{i \leq r} (D_{i,i} - B_{i,i})^2 + \sum_{i=r+1} B_{i,i}^2,$$

et puisque $k < r$, il faut annuler $\sum_{i=r+1} B_{i,i}^2$ en prenant $B_{i,i} = 0$ pour $i = r+1, \dots$. Ensuite, il faut remplir les termes diagonaux $B_{i,i}$ ($i \leq r$) de façon que seulement parmi ces $B_{i,i}$ soient non nuls car on travaille dans Δ_k et que $\sum_{i \leq r} (D_{i,i} - B_{i,i})^2$ soit minimale. La question est donc: quelles positions doit on remplir? Avant d'aborder la réponse, prenons un exemple où $k = 1$ et

$$D = \text{diag}(3, 2, 0).$$

On a 2 choix pour B , soit $B_1 = \text{diag}(3, 0, 0)$ soit $B_2 = \text{diag}(0, 2, 0)$. Vous pouvez constater que B_1 est la bonne réponse. Dans le cas général, remarquez que

$$\sum_{i \leq r} (D_{i,i} - B_{i,i})^2 = \underbrace{\sum_{i: B_{i,i}=0} D_{i,i}^2}_{\text{contient } r-k \text{ termes}} + \sum_{i: B_{i,i} \neq 0} (D_{i,i} - B_{i,i})^2 \quad (\diamond).$$

Donc pour minimiser $(\diamond)$, il faut et il suffit de minimiser $\sum_{i: B_{i,i}=0} D_{i,i}^2$ et $\sum_{i: B_{i,i} \neq 0} (D_{i,i} - B_{i,i})^2$. Minimiser $\sum_{i: B_{i,i} \neq 0} (D_{i,i} - B_{i,i})^2$ est simple en prenant $B_{i,i} = D_{i,i}$. Pour minimiser $\sum_{i: B_{i,i}=0} D_{i,i}^2$, il suffit de prendre $B_{i,i} = 0$ pour les indices des $r - k$ plus petits $D_{i,i}$. Donc si on ordonne les $D_{i,i}$ dans l'ordre croissant $D_{1,1} \geq D_{2,2} \geq \dots \geq D_{r,r}$, la matrice candidate B est

$$B = \text{diag}(D_{1,1}, D_{2,2}, \dots, D_{k,k}, 0, \dots, 0)$$

qui est également un élément de Δ_k . Dans ce cas

$$\text{dist}(A, \Delta_k)^2 = \text{dist}(D, \Delta_k)^2 = \|D - B\|^2 = \sum_{i=k+1}^r D_{i,i}^2.$$

En résumé

$$\text{dist}(A, \Delta_k) = \begin{cases} 0 & k = r \quad (B = D) \\ 0 & r < k \quad (\text{pas de minimisante}). \\ \sum_{i=k+1}^r D_{i,i}^2 & k < r \end{cases}$$

@Sabri : l'article que je vous ai parlé a considéré que $k \leq r$, c'est pour cela il a trouvé les matrices minimisantes avec la norme subordonnée. En particulier, la fermeture d'un ensemble en dimension finie est la même par toute norme pour la simple raison : unicité de la limite .